２３「数学と物理の間」

物理学を勉強していると、その多くが数学で占められていることに気付く。

いかに深く数学の知識を持っているかということが、物理学を進展させることに大きく関係していることを感じる。

１７世紀ニュートンの時代は数学と物理の境目はほとんどなかった。ニュートン力学（運動法則）は、彼自身の高い数学的能力によって体系付けられたものといってよい。

その中心となったのが彼自身もその確立に大きく貢献した“微積分”の応用である。

こうして見ると、物理学はほとんど数学といってよいくらいである。

ただその目指すものは大きく異なる。

数学は、純粋に抽象的なものである。ずっと昔から難問が数学を発展させてきた。

代数方程式が解けるか解けないかということなど、実生活にはほとんど関係ない。５次方程式に代数的解の公式が存在しないことが証明され、このことが群論を生み、その後の数学の発展に大きく寄与することになった。しかし、このことで人の生活が変わるわけではない。

また、「虚数」の発見は数の範囲を拡大するとともに、複素関数論を生み同様に数学の発展に与えた影響は大きい。虚数というとニセの数のように捉えられがちだが、英語では Imaginary Number（想像上の数）であり、その特徴をより正確に表している。日本語の方は適切にその本質を表していない。

物理学において虚数（複素数：$a+bi$）の利用価値は大きい。“振動”を扱うとき、振動に同期する部分が実数部、振動に対して遅れる部分が虚数部に対応する。虚数を導入することで、「同期」と「遅れ」の成分を同時に扱うことができる。振動の世界で虚数は、位相が$\pi/2$だけずれた成分を表現することを可能にする。

数学及び物理学の発展において、虚数の果たした役割は計り知れないのである。

物理の世界では次元は３次元までだ。それは我々の住む世界が３次元だからで、せいぜい時間を加えた４次元時空まで考えればよい。

しかし、数学は違う。次元はn次元まで考えるのであり、通常ではあり得ない範囲まで考えて一般化してしまう。抽象的な世界が数学の対象である。

例えば、半径１の球の体積を考えてみるとおもしろい。１，２，３･･･n次元でどうなるのか？

１次元：2　（１次元は直線の世界だから、長さ２の直線になる）

２次元：3.14（π＝3.1415､､､ ２次元は円の面積なので$\pi R^2=\pi\times 1^2=\pi$）

１，２次元は定義範囲外であるが､､､､

３次元　：4.19（$4\pi R^3/3$）

４次元　：4.93

５次元　：5.26

６次元　：5.17

７次元　：4.72

８次元　：4.06

９次元　：3.30

１０次元：2.55

２０次元：0.026

何と！最大値は５次元と６次元の間にある。正確には 5.26 次元で最大になり、そのときの体積は 5.28 となる。何だか不思議だ。どうしてこんなことがわかるのだろうか？

半径Ｒの n 次元球の体積 V_n の一般式は、つぎのように表される。

$$V_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} R^n$$

$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$は、ガンマ関数といい、$\Gamma(n+1) = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times n = n!$（$n$の階乗を一般化したものであり、$\Gamma(5) = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ である。

Γ関数は自然数のみに限らない。ちなみに、$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ という値になる。

数学の世界は一般化したがる。n 次元の球の体積まで知ることに意義を見出す。

このようなことは面白いといえば面白いが、だから何？　別にどうでもいいことなのでは？

そういわれてしまえば確かにそうだ、でもそうなると数学の立つ瀬はないのだが、、、。

数学は問題が問題を生み、それを解決するとまた次の問題が現れるというように、次々と連鎖反応のように続いていく。そして、さまざまな分野で隙間を覆いながら多くの分野で緻密に発展してきた。

その１つの例が、１７世紀フランスの数学者フェルマーが提示した「フェルマー予想」だろう。

３以上の自然数ｎ（3，4，5，6、、、）について、$X^n + Y^n = Z^n$となる自然数（X，Y，Z）の組み合わせは存在しないに違いない、というのである。N＝２の場合は、$3^2 + 4^2 = 5^2$，$5^2 + 12^2 = 13^2$･･･と無限にあるのに、、、。

この単純そうな問題が、実は思いもよらない超難問で、何と!３６０年後の１９９５年にやっと証明された。つい最近の事なのである。それは楕円曲線の性質を利用して証明され、現在は「フェルマーの最終定理」という形で数学史に燦然と輝いている。

おそらく何千何万という人がこの難問に挑戦し、その間に新しい定理が生まれ、知識が増すとともに新しい分野が開拓された。この難問の証明をきっかけに、数論や代数幾何学分野の発展に繋がったのである。数学は１００年単位の実にロングスパンな学問だ。

一方物理学は、自然現象を解明するために、必要な数学を選んで解決していく。

アインシュタインは、一般相対性理論において時空の歪みを表すためにリーマン幾何学を用いている。リーマン幾何学は、遡ること５０年ほど前に確立された３次元曲面に関する幾何学で、勿論相対論のためにあったものではない。

このように、物理学で必要とされる数学は、ほとんど事前に用意されているのである。

英国の理論物理学者ディラックは非常に数学が得意で、数学が得意な物理学者というより、物理が得意な数学者と言ったほうがいいほどだ。数学の力と、その特異なひらめきにより、反粒子の存在を予言した。

シユレディンガー方程式を相対論に整合させた、クライン・ゴルドン方程式を因数分解して創った方

程式を解くことにより、半整数スピンを導き出すとともに、陽電子の存在を予言したのである。

物理学は自然現象を解明するものであるから、事実に基づかなければならない。しかし、理論と現実が符合しないことが良く出てくる。そんな時、数学的発想から見えない壁を打破し、真理に導く事がある。

その最も端的な例が“くりこみ理論”の考え方だろう。

くりこみ理論というのは、こういうことをいう。

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots\cdots = X \quad \text{------------------------------------} \quad ①$$

という無限級数を考える。これを変形して

$$1 + x(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots\cdots) = X$$

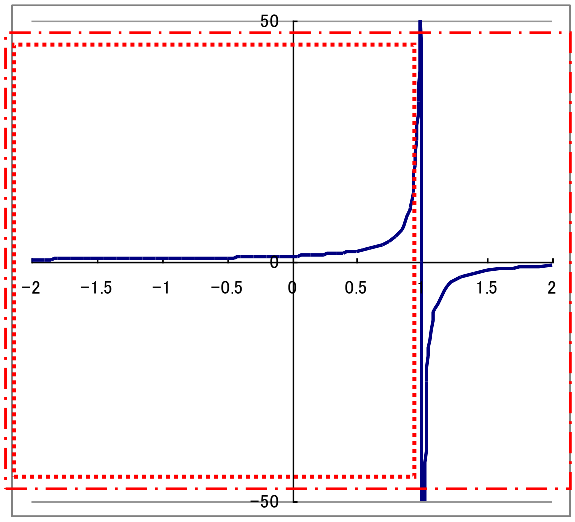
とすると、X が収束するなら、(　　)内も X となるので、X は

$$X = \frac{1}{1-x} \quad \text{------------------------------------} \quad ②$$

と表せる。$X < 1$ のとき、この数列は収束し$X = \dfrac{1}{1-x}$ となる。

しかし、 $X \geqq 1$ のとき、この数列は発散し∞となる。

従って、無限級数 $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots\cdots$は、$X \geqq 1$ のとき成り立たない。



右図において、　　　内が①の定義域、一方　　　内が②の定義域で、$x = 0$ 以外はすべて定義される。

すなわち、①と②は $X < 1$ のとき同じ値であるが、$X \geqq 1$ になると①は使えなくなってしまう。

①に定義域以外の値を入れてしまったため、発散してしまったが、そこで「くりこみ理論」とは、①の本来の姿は②であると考えることなのである。

$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots\cdots$に$x = 2$ を入れると∞になってしまうが、②に $x = 2$ を入れると $X = -1$ を得ることができる。

無限に見えていた数を、数学的技法により有限の意味ある値に「くりこむ」のがその真髄だ。それは、あたかも無限を有限に“くりこんだ”かに見える。

普通なら発散してしまう 1＋2＋3＋4＋‥‥も、くりこみを使うと $-\dfrac{1}{12}$ となる。すべてプラスの数を足しているのに、マイナスの分数になることが何とも不思議ではある。

数学の世界では、関数の実数変数を複素数に拡張することにより、未知の世界が開かれる。これを解析接続といっている。

かの朝永振一郎のノーベル賞受賞の業績は、場の量子論（相対論的量子論）における「くりこみ」理論であった。

彼の取り組んだ「量子電気力学」は電磁気力に関する場の量子論だが、当時“発散”という大きな問題に直面していた。電子が放出した光子（電磁力を媒介する素粒子）は、波の性質により回折して戻っ

てきて、もとの電子に吸収される（電子の自己相互作用）ことがある。これらの自己相互作用を計算すると、積分計算が無限大に発散してしまう。

彼は「超多時間理論」を考案、質量と電荷について無限大が起きないように再定義する。
超多時間理論とは、１，９３２年ディラックが提唱した多時間理論（相互作用をしている電子１つ１つに独立な時間を与える）が電子の生成・消滅のための時間を含まないことになる欠点を改め，空間内の各点にそれぞれ固有の時間を与えなおして組み立てたものである。

電子は常に自己相互作用の“衣”をまとっているので、実際に観測される電子の質量と電荷は“衣”をはぎ取った「裸の質量と電荷」に、自己相互作用の寄与分を合わせたものとして解釈できる。

裸の質量と電荷は原理的に直接測定できない。ここで、自己相互作用の寄与は場の量子論によれば無限大だ。とすれば、計算上で電荷と質量を観測値と同じ有限値にするには、自己相互作用の無限大の寄与をうまく打ち消すような形で、裸の電荷と質量も無限大に発散させれば破綻は回避される。

このくりこみ理論の導入により、実験結果と驚異的な精度で一致することが確かめられたのである。

この発想が朝永振一郎をノーベル賞に導いたのであった。

（２０１１．０８．０７）